

TD 5 - Réduction des endomorphismes

1 Sur la diagonalisation des matrices

1.1 Matrices réelles diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$, avec $n = 2$ ou $n = 3$.

On considère les matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour chacune d'elles :

- calculer le polynôme caractéristique et en déduire les valeurs propres ;
- déterminer les sous-espaces propres associés ;
- justifier que la matrice est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ (où n est la taille de la matrice), et déterminer P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

1.2 Matrices réelles diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$, avec $n = 2$ ou $n = 3$.

On considère les matrices suivantes.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour chacune d'elles :

- calculer le polynôme caractéristique ; la matrice est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ?
- Dans la suite on considère chaque matrice comme une matrice à coefficients complexes. Déterminer les valeurs propres (complexes), et les sous-espaces propres associés.
- Déterminer P inversible et D diagonale à coefficients complexes telles que $P^{-1}BP = D$.

1.3 Matrices réelles non diagonalisables

On considère

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le polynôme caractéristique de M et de N , en déduire les valeurs propres.
- Déterminer les sous-espaces propres associés.
- Justifier qu'elles ne sont diagonalisables ni sur \mathbb{R} , ni sur \mathbb{C} .

1.4 Exercices d'entraînement

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Applications de la diagonalisation des matrices

2.1 Puissances d'une matrice

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose $a = 0$.
 - (a) Diagonaliser A : montrer qu'il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
 - (b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Application aux suites définies par une relation de récurrence linéaire

2.2.1 Relation de récurrence d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite réelle déterminée par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n > 2$.

- a) Calculer les termes u_2, u_3, u_4 en fonction de u_0 et u_1 .
- b) En introduisant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, écrire la relation de récurrence sous la forme $U_{n+1} = AU_n$, avec une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ à préciser.
- c) Démontrer (par récurrence) que : $\forall n \geq 1$, on a $U_n = A^n U_0$.
- d) Justifier que A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, et déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. (Rappel : section 1.1)
- e) Soit $n \geq 1$. Expliciter A^n , et en déduire la valeur de U_n puis celle de u_n . (Cette expression était-elle devinable?)

2.2.2 Système défini par une relation de récurrence

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Expliciter en fonction de n les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 3v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

2.3 Application à la résolution de systèmes différentiels

Soit $m, k > 0$. On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre 2

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Cette équation apparaît quand on considère un ressort de raideur k , posé sur un plan, et auquel est accrochée une masse m . Si on tire la masse (en étirant le ressort) et qu'on lâche et qu'il n'y a pas de

frottements, alors l'écart $x(t)$ entre la position de la masse à l'instant t et la position d'équilibre (quand le ressort n'est pas étiré) satisfait l'équation différentielle précédente. Enfin, pour traduire qu'on a étiré le ressort de la longueur h , puis qu'on a lâché la masse (sans lui donner de vitesse), on rajoute les conditions

$$x(0) = h, \quad x'(0) = 0.$$

a) En introduisant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, écrire le problème sous la forme

$$X'(t) = BX(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} x(0) = h \\ x'(0) = 0 \end{pmatrix}$$

avec une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ à préciser.

b) Déterminer $P \in M_2(\mathbb{C})$ inversible et $D \in M_2(\mathbb{C})$ diagonale telles que $B = PDP^{-1}$. (Rappel : section 1.2)

c) On introduit le vecteur $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Démontrer que Y vérifie

$$Y'(t) = DY(t), \quad Y(0) = P^{-1}X(0).$$

d) En déduire $Y(t)$, puis $X(t)$ en pour finir $x(t)$. Comment décrire le mouvement de la masse ?

3 Sur la diagonalisation des endomorphismes

3.1 Exemple 1

Soit E un espace vectoriel complexe, muni d'une base (e_1, \dots, e_n) . Soit f un endomorphisme de E tel que $f(e_k) = e_{k+1}$ pour $k = 1, \dots, n-1$ et $f(e_n) = e_1$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de f .

(b) En déduire que f est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?

3.2 Exemple 2

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de E . On considère f l'endomorphisme de E de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $A + I_n$.

2) En déduire $\text{Im}(f + id_E)$, puis la dimension du noyau $\text{Ker}(f + id_E)$.

3) Calculer $f(\sum_{i=1}^n e_i)$.

4) En déduire que A est diagonalisable sur \mathbb{R} .

5) Que vaut $\det(A)$?

6) Pour $n = 4$, trouver une matrice M de $M_4(\mathbb{C})$ telle que

$$M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Symétrie

Soient E un espace vectoriel et $s \in L(E)$ tel que $s \circ s = id_E$.

- (a) Montrer que les seules valeurs propres possibles de s sont 1 et -1.
- (b) Soit $x \in E$. Vérifier qu'il existe des vecteurs x^+ et x^- tels que $x = x^+ + x^-$ et $s(x^\pm) = \pm x^\pm$.
- (c) En déduire que s est diagonalisable.
- (d) Décrire l'action de s par un dessin.

3.4 Dans l'espace des polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = XP'(X)$.

- 1) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Prouver que f est diagonalisable.

3.5 Dans l'espace des fonctions continues

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et à valeurs réelles. Soit

$$\phi : E \rightarrow E, \quad \phi(f)(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+t) f(t) dt.$$

- a) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E .
- b) Déterminer ses valeurs propres et fonctions propres. On pourra procéder par analyse-synthèse : si f est une fonction propre, alors... ; réciproquement, si f est de cette forme, alors...